„Ég leysi stundum vandamálið með svona hringjum“ Hugsun barna um margföldun

Birt til heiðurs dr. Ingvari Sigurgeirssyni prófessor sjötugum

Ólöf Björg Steinþórsdóttir, Guðbjörg Pálsdóttir og Jónína Vala Kristinsdóttir

KRISTINN INGVARSSON TÓK MYNDIRNAR AF GUÐBJÖRGU OG JÓNÍNU VÖLU.

Rannsóknir á námi barna, ekki síst hvernig þau takast á við námið, efla þekkingu okkar á mikilvægum þáttum til að byggja á við kennslu. Ingvar Sigurgeirsson hefur verið ötull við að fylgjast með lífinu í skólastofunni, hlusta á og ræða við nemendur. Hann er talsmaður þess að vinna með börnum á forsendum þeirra og skapa þeim fjölbreytt tækifæri. Í þessari grein er gefin innsýn í hluta af rannsókn á talna- og aðgerðaskilningi íslenskra barna. Rannsóknin er samstarfsverkefni stærðfræðideildar Háskóla Norður Iowa og Menntavísindasviðs Háskóla Íslands. Í greininni er fjallað um niðurstöður úr rannsókn okkar og greint frá hvernig nokkur sex til átta ára börn glíma við margföldun. Skoðað er hvernig nota má niðurstöðurnar sem leiðarhnoða í að styðja börnin við að efla skilning sinn og leikni í reikningi. Unnið er út frá hugmyndum um *Cognitively Guided Instruction* sem á íslensku kallast *Stærðfræðikennsla byggð á skilningi barna,* sem hafa verið að þróast síðan um 1990. Í greininni verður íslenska heitið notað.

Erlendar rannsóknir gefa mikilvægar upplýsingar um talna- og aðgerðaskilning barna sem nýtast í íslensku skólastarfi, en lítið er til af rannsóknum um íslensk börn. Tilgangur rannsóknarinnar er tvíþættur. Annars vegar að skoða talna- og aðgerðaskilning íslenskra barna og hins vegar að búa til efni sem hægt er að nýta með kennaranemum og í þróunarvinnu með kennurum í leik- og grunnskóla. Markmið rannsóknarinnar er að skoða hvernig fimm til tíu ára gömul börn hugsa þegar þau glíma við reikniþrautir sem tengjast samlagningu, frádrætti, margföldun og deilingu, hvaða lausnaleiðir þau nota og hvernig þau segja frá hugsun sinni og lausnum. Hluti af rannsóknarverkefninu er þróunarvinna með kennurum úr þremur skólum þar sem þeir kynnast hugmyndum um *Stærðfræðikennslu byggða á skilningi barna (SKSB).* Þar skoða kennarar og greina hvernig þeir geta brugðist við hugmyndum nemenda sinna til að styðja þá við að þróa stærðfræðihugsun sína.

Í þessari grein munum við ræða um hugsun barna og lausnaleiðir þeirra við einfalda margföldunarþraut til að gefa lesendum innsýn í nokkur lykilatriði í þróun skilnings barna á tölum og reikningi. Við greiningu lausnaleiða barnanna nýtum við þau greiningarviðmið sem sett voru fram í niðurstöðum rannsókna- og þróunarverkefnisins *SKSB* (Carpenter, Fennema, Franke, Levi og Empson, 2015). Að lokum fjöllum við um nokkur atriði sem vakið hafa okkur til umhugsunar um stærðfræðinám ungra barna í tengslum við rannsóknina.

Rannsóknir á skilningi barna á tölum og reikniaðgerðum

Miklar framfarir hafa átt sér stað á sviði stærðfræðimenntunar undanfarna áratugi. Öflugar rannsóknir á stærðfræðiskilningi ungra barna veita upplýsingar sem nýtast kennurum og í kennaramenntun. Kennslufræðileg þekking hefur þróast í rannsóknum sem unnar hafa verið í samvinnu fræðimanna á sviði stærðfræðimenntunar, kennara og nemenda þeirra. Ein slík rannsókn er rannsóknar- og þróunarverkefnið *Stærðfræðikennsla byggð á skilningi barna* (Carpenter, Fennema, Franke, Levi og Empson, 1999; Carpenter o.fl., 2015). Í þessum rannsóknum hefur verið lögð áhersla á að greina hvernig börn byggja upp skilning sinn og hvers konar kennsluhættir styðja við þróun stærðfræðiskilnings barna. Rannsóknir á hæfni kennara til stærðfræðikennslu hafa leitt í ljós að til að skipuleggja kennslu á greiningu á lausnaferli nemenda sinna, þurfa kennarar að hafa sértæka þekkingu á stærðfræði og stærðfræðinámi og -kennslu (Hill, Ball og Schilling, 2008; Niss, 2011; Thames og Ball, 2010). Grunnur að þeirri sértæku þekkingu er hæfni kennara til að rýna af nákvæmni í stærðfræðihugsun barna og hvernig hann getur nýtt þá þekkingu til að taka ákvarðanir um áframhaldandi kennslu (Empson og Jackobs, 2008).

Stærðfræðikennsla byggð á skilningi barna (*SKSB*) byggir á þeirri sýn að þegar börn byrja í skóla hafi þau öðlast óformlega stærðfræðiþekkingu og beiti innsæi við rannsóknir á tölum og umhverfi sínu (Carpenter o.fl., 2015; Carpenter, Franke, Levi, Johnson, Turrou og Wager, 2017; Empson og Levi, 2011). Kennarar sem byggja á niðurstöðum *SKSB* rannsóknanna nýta sér innsæi barnanna og óformlega þekkingu þeirra sem grunn við að styðja við uppbyggingu formlegrar stærðfræðiþekkingar barna. *SKSB* er ekki forskrift að kennsluháttum heldur byggir á þeirri meginhugsjón að stærðfræðinám felist í merkingarsköpun, það er að stærðfræðilegur skilningur og hugsun þróist við að fást við stærðfræðileg viðfangefni og taka þátt í umræðu um þau.

Niðurstöður rannsókna Carpenter og félaga leiddu í ljós að börn geta leyst einföld orðadæmi um samlagningu, frádrátt, margföldun og deilingu og nota við það mismunandi leiðir þó þeim hafi ekki verið kenndar aðferðir til þess (Carpenter og Moser, 1984; Carpenter o.fl., 2015). Í rannsóknunum var greint hvernig börn skilja þrautir af mismunandi gerðum og hvernig lausnaleiðir þeirra þróast. Í kjölfarið voru sett fram viðmið um tegundir þrauta og þróun lausnaleiða barna á þeim. Þessi viðmið nýtast kennurum við greiningu á skilningi nemenda sinna. Greiningin nýtist kennurum til að bregðast við hugmyndum nemenda og byggja á þeim við skipulag kennslu sinnar með það að markmiði að nemendur þeirra öðlist haldgóðan skilning og þekkingu á tölum og reikniaðgerðum.

Í viðmiðum um þrautir um samlagningu og frádrátt eru fjórir grunnflokkar. Það eru þrautir um sameiningu, aðskilnað, hluta og heild og samanburð. Með því að breyta óþekktu stærðinni í hverjum flokki er hægt að búa til 11 mismunandi gerðir af þrautum (sjá nánar Carpenter o.fl., 2015; Jónína Vala Kristinsdóttir, 2004). Í þrautum um margföldun og deilingu má greina þrjár tegundir þrauta. Í margföldunarjöfnunni $a \cdot b = c$ eru þrír liðir, heildarfjöldi (c), fjöldi mengja (a) og fjöldi staka í hverju mengi (b). Ef heildarfjöldinn er óþekktur er um að ræða margföldunardæmi eða endurtekna samlagningu. Ef fjöldi mengja er óþekktur er deilingin endurtekinn frádráttur (mælideiling) og ef fjöldi staka í hverju mengi er óþekktur er um skiptingu að ræða. Sjá töflu 1.

Tafla 1: *Þrautir um margföldun og deilingu*

Reikniaðgerð	Dæmi um þraut
Margföldun	Sólveig kaupir 4 poka af gulrótum. Það eru 6 gulrætur í hverjum poka. Hve margar gulrætur á Sólveig samtals?
Deiling – Mælideiling (Measurment Division)	Sólveig á 24 gulrætur. Hún setur 6 gulrætur í hvern poka. Hve marga poka þarf hún fyrir gulræturnar?
Deiling – Skipting (Partitive Division)	Sólveig á 24 gulrætur. Hún skiptir þeim jafnt í 4 poka. Hve margar gulrætur eru í hverjum poka?

Í rannsóknunum *SKSB* kom í ljós að börn sem fá tækifæri til að leysa þrautir með eigin aðferðum þróa með sér lausnaleiðir sem ákvarðast af fyrri reynslu þeirra og þroskastigi. Þetta ferli er líkt hjá öllum börnum og skiptist í þrjú meginstig:

Stig 1— hlutbundið líkan sem fylgir söguþræði
Stig 2— talning
Stig 3— tengslahugsun og nýting talnastaðreynda

Flokka má lausnaleiðir barna við samlagningu, frádrátt, margföldun og deilingu í þessu þrjú meginþroskastig. Hér á eftir verður útskýrt nánar hvernig þroskastigin þrjú birtast í lausnum barna í margföldun. Til að fjalla um lausnir barna á margföldunarjöfnunni $a \cdot b = c$ er jafnan $4 \cdot 6 = 24$ notuð sem dæmi.

Í upphafi gera börn sér hlutbundið líkan sem fylgir söguþræði þrautarinnar. Líkanið inniheldur öll mengin sem fram koma í sögunni og öll stökin í hverju mengi. Börnin nota hluti, fingur eða skýringarmyndir til að búa til líkanið. Til að finna heildarfjölda staka eða lausnina telja börnin öll stökin og telja í byrjun á einum (þ.e. einn, tveir, þrír …). Það sem einkennir þetta stig er að allur fjöldinn sem fram kemur í sögunni er sýnilegur í líkaninu sem börn búa sér til. Oft byrja þau á að afmarka mengin áður en þau raða stökum í þau til dæmis með því að setja merki fyrir hvert mengi eða afmarka svæði fyrir þau. Þegar börnin hafa raðað öllum stökum í mengin telja þau öll stökin til að finna heildarfjöldann.

Næsta stig er að nota talningu án þess að gera sér líkan en börnin halda sig þó enn við söguþráð þrautarinnar. Lausnina, eða heildarfjölda staka, finna þau með því að telja á þeim tölum sem fjöldinn í hverju mengi segir til um. Ef þrautin er til dæmis um 4 mengi með 6 stökum í hverju mengi, þá telja þau á sex. Oft nota börnin fingur til að hjálpa sér að halda utan um talninguna, setja einn fingur upp við hverja tölu. Þau segja 6 (einn fingur á loft), 12 (tveir fingur), 18 (þrír fingur), 24 (fjórir fingur) og talan sem nefnd er síðast segir til um heildarfjölda staka í öllum mengjunum. Á þessu stigi eru börn líka oft farin að nota skráningu og skrá þá „6 12 18 24“ eða „6+6 –> 12+6 –> 18+6 –> 24“. Þegar börn gera sér hlutbundið líkan (stig 1) eru öll mengi og öll stök sýnileg og við gerð líkansins helst söguþráðurinn óbreyttur. Við talningu (stig 2) eru öll mengi og öll stök enn óbreytt og samkvæmt söguþræðinum en börnin þurfa ekki lengur að sjá fjöldann sex á hlutbundinn hátt heldur geta þau séð þann fjölda huglægt.

Þriðja stig lausnaleiða er nefnt tengslahugsun. Börn geta nú unnið með tölur á sveigjanlegan hátt og nýtt sér auk þess ýmsar staðreyndir um tölur sem þau þekkja og talnasambönd til að leysa þrautir um margföldun. Söguþráðurinn er ekki lengur augljós í lausnaleiðum á þessu stigi. Börn verða fljótt leikin í að margfalda með tveimur og nýtist sú þekking þeim vel í margföldun þar sem fjöldi mengja eða fjöldi staka í hverju mengi er slétt tala. Þau ná einnig mörg leikni í að nýta sér þekkingu á margföldun með fimm. Það auðveldar börnum að finna lausn á margföldunardæmi þegar þau hafa áttað sig á að margföldun er víxlin sem er táknað $a \cdot b = b \cdot a$ (sjá töflu 2). Það er ekki augljóst að í 4 pokum með 6 gulrótum í hverjum séu jafn margar gulrætur og í 6 pokum með 4 gulrótum í hverjum fyrr en maður hefur fengist við að leysa slík verkefni og þannig sannreynt að $4 \cdot 6 = 6 \cdot 4$.

Tafla 2: *Reiknireglur og birting þeirra í margföldun*

Eiginleikar margföldunar	Táknmál stærðfræði	Dæmi um skráningu
Víxlregla	$a \cdot b = b \cdot a$	$10 \cdot 8 = 8 \cdot 10$ $4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 4$
Tengiregla	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	$3 \cdot 20 = 3 \cdot (2 \cdot 10) = (3 \cdot 2) \cdot 10$ $12 \cdot 25 = (3 \cdot 4) \cdot 25 = 3 \cdot (4 \cdot 25)$ $4 \cdot \frac{3}{4} = 4 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 3\right) = (4 \cdot \frac{1}{4}) \cdot 3$
Dreifiregla, margföldun er dreifin yfir samlagningu	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	$8 \cdot 12 = 8 \cdot (10 + 2) = (8 \cdot 10) + (8 \cdot 2)$ $4 \cdot 27 = 4 \cdot (25 + 2) = (4 \cdot 25) + (4 \cdot 2)$ $4 \cdot \frac{3}{4} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \left(4 \cdot \frac{1}{2}\right) + (4 \cdot \frac{1}{4})$
Hlutleysa	$a \cdot 1 = a$	$12 \cdot 1 = 12$
Andhverfa	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$	$4 \cdot \frac{1}{4} = 1$

Börn öðlast þekkingu og skilning á þeim reglum sem gilda um reikniaðgerðir við að leysa verkefni. Á sama hátt og skilningur á víxlreglu vex með notkun hennar ná börn líka að nýta sér eiginleika bæði tengi- og dreifireglu þegar þau leysa verkefni. Af reynslunni læra börn að þau geta nýtt sér þá þekkingu að $3 \cdot 2 = 6$ til þess að finna hvað $3 \cdot 20$ er mikið. Margföldun er tengin líkt og samlagning og þess vegna gildir að $3·20 = 3·(2·10) = (3·2)·10 = 6·10 = 60$. Á sama hátt hjálpar reynslan þeim að skilja að margföldun er dreifin yfir samlagningu og þess vegna er $8·12 = 8·(10 + 2) = 8·10 + 8·2 = 80 + 16 = 96$ (sjá töflu 2).

Þróun lausnaleiða er ekki línulegt ferli. Barn sem getur notað tengslahugsun við lausn á einföldum þrautum með lágum tölum getur þurft að gera sér líkan af þraut sem er af flókinni gerð og/eða með háum tölum. Með aukinni þjálfun geta börn beitt óhlutbundinni hugsun og notfært sér reiknireglur og talnasambönd sem þau þekkja við lausn þrauta. Í töflu 3 er gefin yfirlitsmynd af þremur stigum lausnaleiða við margföldun.

Tafla 3: *Margföldun - Lausnaleiðir barna*

Þraut: Sólveig kaupir 4 poka af gulrótum. Það eru 6 gulrætur í hverjum poka. Hve margar gulrætur á Sólveig samtals?	
Lausnarleið	**Dæmi um lausnarleið**
Gera sér hlutbundið líkan Líkan fylgir söguþræði	Barn býr sér til líkan með kubbum (eða öðrum hlutum) eða teikningum. Fyrst telur það 6 hluti í hóp til að tákna einn poka með 6 gulrótum í pokanum. Það er endurtekið til að sýna alla pokana fjóra. Til að finna heildarfjöldann telur barnið allar gulræturnar (eða táknin fyrir þær) frá fyrsta poka. Það telur frá einum upp í 24 á einum. Einkenni: Öll mengi og öll stök í hverju mengi eru sýnileg.
Talning Hopp talning	Barn telur á sex þar til 4 sexur hafa verið taldar; 6, 12, 18, 24. Oft eru fingur eða strik á blaði notuð sem stuðningur við talningu til að halda reiður á hve margar sexur hafa verið taldar. Einkenni: Öll mengi eru sýnileg og stök í hverju mengi haldast óbreytt. Fjöldi staka í mengi er huglægur og talið er á fjölda staka í hverju mengi.
Tengslahugsun Álykta út frá þekktum staðreyndum Vinna með tölur á sveigjanlegan hátt	Barn vinnur með tölur á sveigjanlegan hátt, nýtir sér talnastaðreyndir og reiknireglur um margföldun (sjá töflu 2). Lausnaleiðir birtast á mismunandi hátt. Til dæmis: • $6 + 6 = 12$ og finna heildarfjöldann með því að leggja saman $12 + 12$ (margföldun er dreifin yfir samlagningu) • $2 \cdot 6 = 12$ og $2 \cdot 12 = 24$ (tengiregla um margföldun) • $5 \cdot 6 = 30$ og $30 – 6 = 24$ (margföldun er dreifin yfir frádrátt) Einkenni: Söguþráðurinn er ekki lengur augljós í lausnarleiðinni, mengi og stök í hverju mengi eru ekki sýnileg. Fjöldi mengja og/eða fjöldi staka hafa verið tengd saman á nýjan hátt.

Nýta má stigin í töflu 3 til að greina hvernig börn takast á við einstaka þrautir og ákveða hvað og hvernig er gott að ræða við þau um lausnaleiðir sínar. Hlutverk kennarans er að styðja börnin við að gera sér grein fyrir lausnaleiðum sínum með spurningum og hvatningu til að tjá sig um þær. Þess vegna er mikilvægt að kennarinn hlusti og fylgist með börnum glíma við þrautir og greina leiðir þeirra. Greining á lausnaleiðum er mikilvægur grundvöllur við skipulag kennslu. Hún er forsenda ákvarðanatöku um markmið kennslunnar og að hvaða stærðfræði beina þarf sjónum barnanna að hverju sinni. Hér á eftir verður greint frá dæmum um lausnaleiðir sem komu fram í yfirstandandi rannsókn okkar á talna- og aðgerðaskilningi barna.

Sex, sjö og átta ára gömul börn leysa margföldunarþraut

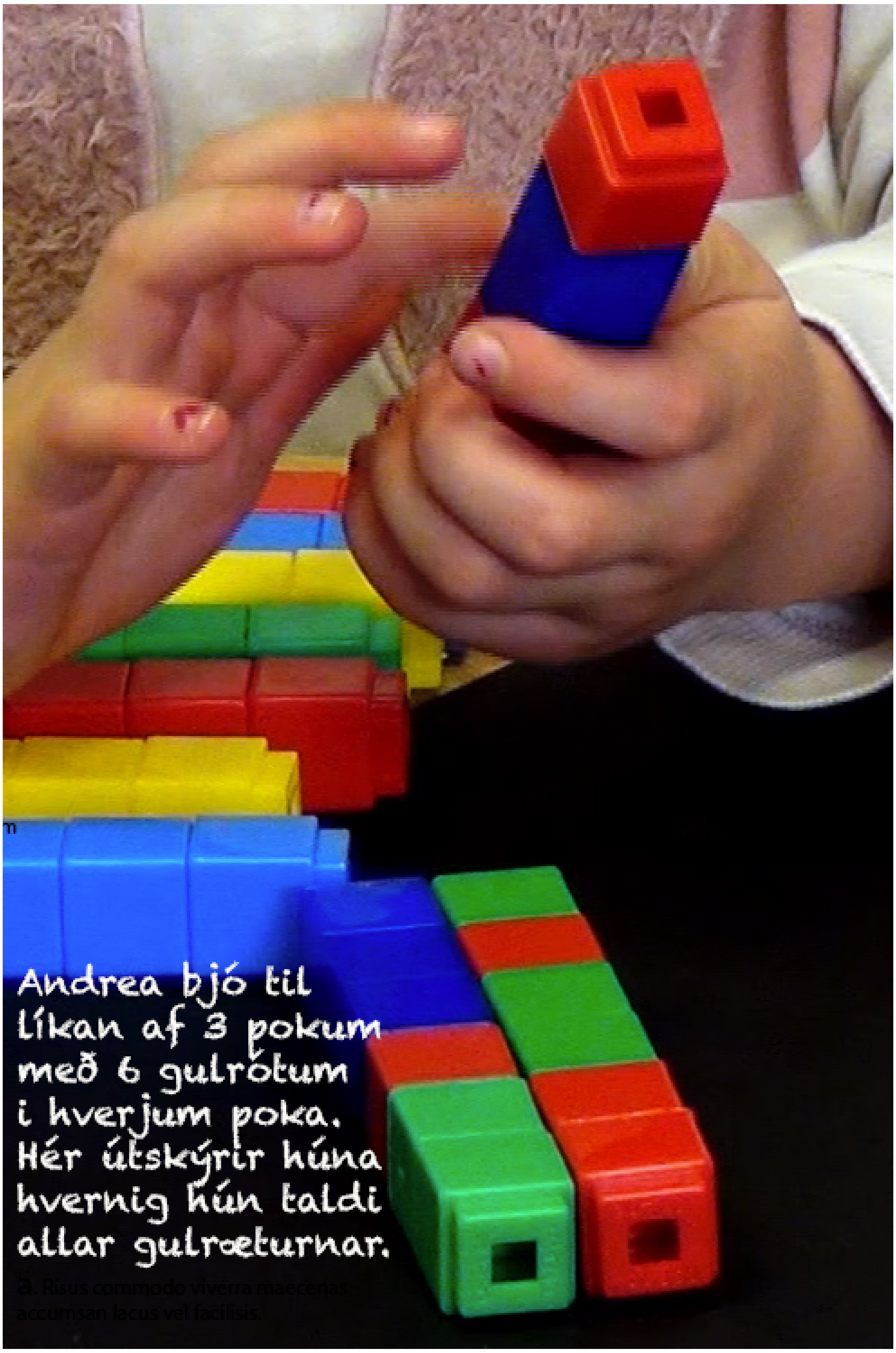
Tekin voru viðtöl við fimm til níu ára börn úr nokkrum skólum á höfuðborgarsvæðinu og tók hvert viðtal 20 – 50 mínútur. Börnin sátu við borð og höfðu aðgang að einfestukubbum, sætisgildiskubbum, pappír og pennum. Hvert barn var beðið um að leysa nokkrar reikniþrautir og útskýra hvernig það fór að. Þessi viðtöl voru kvikmynduð. Lausnaleiðir og útskýringar barnanna á einstökum þrautum voru greindar með hliðsjón af niðurstöðum rannsókna og þróunarverkefnisins *Stærðfræðikennsla byggð af skilningi barna* (Carpenter o.fl., 2015). Hér verða gefin nokkur dæmi úr rannsókninni um ólíkar lausnaleiðir barna á þraut um margföldun. Börninum voru gefin dulnefni.

Hlutbundnar lausnaleiðir

Dæmi um hlutbundna lausn (sjá töflu 3) má sjá hjá Andreu þegar hún leysir eftirfarandi þraut:

Sólveig keypti 3 poka af gulrótum. Í hverjum poka voru 6 gulrætur. Hvað keypti Sólveig margar gulrætur samtals?

Andrea býr til líkan sem sýnir 3 poka með 6 gulrótum í hverjum poka og notar kubba sem tákn fyrir gulrætur. Fyrst gerir hún sér líkan af einum poka með því að setja saman 6 kubba í lengju, setur svo saman aðra 6 kubba og að lokum býr hún til þriðju lengjuna með 6 kubbum. Hún telur svo kubbana í öllum lengjunum á einum (einn, tveir, þrír, …) og fær svarið 18 (sjá mynd 1). Við lausnina fylgir Andrea söguþræðinum. Hún telur af miklu öryggi 6 gulrætur í hvern poka og til að staðfesta heildarfjöldann telur hún aftur frá einum, á einum upp í 18. Útskýring Andreu á lausnaleið sinni er lýsandi, það er hún endurtekur talninguna á öllum kubbunum. Hún sýnir skilning á þrautinni og finnur leið til að leysa margföldunardæmi þó hún þekki ekki jöfnuna $3 \cdot 6 = 18$. Þegar Andrea leysir þrautina fær hún tækifæri til að vinna með margföldun, nýta við það talnaskilning sinn og gera sér mynd af sögunni um gulræturnar. Þessi reynsla styður við þróun skilnings hennar á margföldun.



Mynd 1: Líkan Andreu

Í þessu myndskeiði má sjá útskýringu Andreu á lausnarleið sinni.

Annað dæmi af hlutbundinni lausn (sjá töflu 2) sjáum við hjá Iðunni þar sem hún leysir þrautina:

Sólveig keypti 4 poka af gulrótum. Í hverjum poka voru 6 gulrætur. Hvað keypti Sólveig margar gulrætur samtals?

Í þessu myndskeiði má sjá lausnarleið Iðunnar

Iðunn leysir þrautina einnig með því gera sér hlutbundið líkan, en hún velur að teikna mynd. Hún byrjar á því að teikna einn poka og teiknar inn í hann 6 strik sem tákn fyrir gulrætur. Hún teiknar svo hina pokana á sama hátt, einn poka í einu (sjá mynd 2). Til að finna heildarfjöldann telur hún gulræturnar í fyrstu tveimur pokunum, stoppar og telur svo fjöldann í hinum tveimur pokunum. Þegar hún er beðin um að lýsa lausnarleið sinni segir hún „Hér eru 12 [bendir á 2 poka] og þetta hér eru 12 [bendir á hina 2 pokana] og 12 plús 12 eru 24."

Mynd 2: Líkan Iðunnar

Í lýsingunni kemur fram að Iðunn nýtir sér að þekkja fjöldann í tveimur pokum (12) til finna fjölda í 4 pokum. Hún telur ekki hverja einstaka gulrót aftur heldur leggur saman tólf og tólf (12 + 12) til að finna heildarfjöldann. Hún beitir meðvitað samlagningu og sýnir vald á leiðum við samlagningu til að einfalda sér lausnina. Í lausnarferlinu sýnir hún skilning á margföldun og samlagningu. Iðunn veit að hún er endurtekið að leggja saman fjölda staka í hverju mengi, en endurtekin samlagning er einn af grunnþáttum margföldunar. Þá sýnir hún einnig skilning á tengireglu í samlagningu, þegar hún tengir saman tvær sexur og leggur svo tólf og tólf saman. Tengireglu samlagningar má tákna $6 + 6 + 6 + 6 = (6 + 6) + (6 + 6)$. Iðunn sýnir sveigjanleika í lausn sinni og nýtir sér talnasambönd sem hún þekkir. Sveigjanleiki í hugsun er forsenda fyrir því að geta skilið bæði tengireglu og dreifireglu. Lausnarleið Iðunnar er hægt að skrá á eftirfarandi hátt: $4 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 + 6 = (6 + 6) + (6 + 6) = 12 + 12 = 24$.

Þriðja dæmið um lausnarleið sem byggist á að gera sér hlutbundið líkan (sjá töflu 2) má sjá hjá Sölku sem leysti sömu þraut og Iðunn.

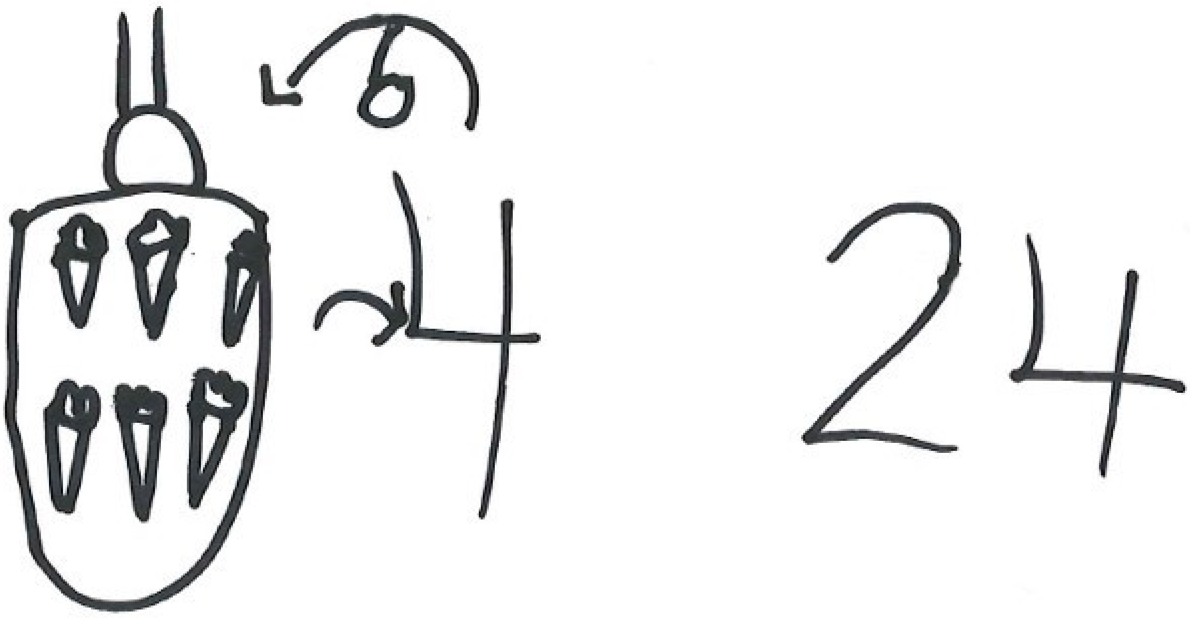
Í þessu myndskeiði má sjá lausnarleið Sölku

Salka notar kubba og byrjar á að búa til hvern poka fyrir sig. Hún telur 6 kubba i hrúgu fyrir hvern poka. Hún finnur svo heildarfjöldann með því að setja alla kubbana í stóra hrúgu og telur frá einum, á einum, upp í 24. Eftir að Salka hafði lokið við að leysa þrautina, var hún hvött til að skrá lausnarferli sitt á blað.

Í þessu myndskeiði má sjá skráningu Sölku

Salka setur þá fram sína eigin hugmynd um skráningu á margföldun. Hún teiknar mynd af einum poka með 6 gulrótum og býr til sín eigin tákn fyrir margföldun (sjá mynd 3). Í útskýringu sinni segir hún:

Svo get ég líka bara gert svona poka, svona hald á pokann og þetta er höndin [hún bendir á bogann ofan á pokanum og tvö lóðrétt strik, hún teiknar síðan 6 gulrætur í pokann] svo eru 4 svona pokar [teiknar ör frá poka í tölustafinn 4] og inn í þessu eru 6 [teiknar ör frá tölunni 4 í átt að pokanum og skrifar 6 undir örina] … þá eru þetta 24. Ég leysi stundum vandamálið með svona hringjum, þetta fer svona og þetta fer svona [bendir um leið á örvarnar].



Mynd 3: Skráning Sölku

Ein af grundvallarhugmyndum margföldunar er að fjöldi staka í einu mengi margfaldast eins oft og margföldunarstuðullinn segir til um. Samræðan við Sölku og skráning hennar gefur vísbendingu um að Salka skilur að fjöldi gulróta í einum poka þarf að margfaldast fjórum sinnum þó að hún noti ekki hefðbundnar skráningarleiðir til að skýra hugsun sína.

Í umræðu um lausnina fékk Salka tækifæri á að endurskoða lausnarleið sína og það hjálpar henni að sjá að það er hægt að leysa þrautina án þess að sýna allar gullræturnar. Þörf Sölku fyrir að búa sér til líkan fer minnkandi, hún getur séð fyrir sér í huganum fjölda poka og notar skráningu til að sýna lausnarferlið. Salka sýnir áræðni við að leysa þrautina og tekur eignarhald á verkefninu og lausnarferlinu.

Lausn sem byggir á talningu

Dæmi um lausn sem byggir á talningu (sjá töflu 3) má sjá hjá Óðini þegar hann leysir sömu þraut og Iðunn og Salka.

Sólveig keypti 4 poka af gulrótum. Í hverjum poka voru 6 gulrætur. Hvað keypti Sólveig margar gulrætur samtals?

Í þessu myndskeiði má sjá lausnarleið Óðins

Óðinn leysir þrautina með því að telja á 6, fjórum sinnum eða 6, 12, 18, 24. Óðinn hugsar upphátt þegar hann leysir þrautina og hann segir „6 plús 6 eru 12 og 12 plús 6 eru át…

sextán, já, nei, ég held 18 og 6 plús 18 eru 24”. Ljóst er að hann þarf að hugsa sig aðeins um og er líklega að telja á einum í huganum frá 18 upp í 24. Þegar Óðinn er spurður hvernig hann vissi hvar ætti að hætta segir hann „af því ég átti að gera fjórum sinnum”.

Óðinn leysir þrautina án hiks og finnur sér strax lausnarleið. Lausn hans er skýrt dæmi um talningaraðferð. Eins og í lausn Andreu og Iðunnar, eru öll mengin sýnileg í lausnarleið Óðins og mengin fjögur má sjá þegar Óðinn telur á sex fjórum sinnum. Fjöldi staka er huglægur, það eru sex gulrætur í hverjum poka og Óðinn þarf ekki lengur að sjá hvert stak í menginu, eða hverja gulrót. Hann veit að með því að leggja sex saman fjórum sinnum finnur hann heildarfjölda gulróta. Þar sýnir Óðinn skilning á að þrautin er um fjögur mengi með sex stökum í hverju mengi og að lausnina má finna með endurtekinni samlagningu, sem er er ein af grundvallarhugmyndum margföldunar. Lausnarleið Óðins er hægt að skrá á eftirfarandi hátt: $4 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 + 6$. Hann þekkir samlagningarstaðreyndina að $6 + 6$ er jafnt og 12 og leggur svo áfram 6 við sem lýsa má með eftirfarandi skráningu: 6 + 6 + –> 12 + 6 –> 18 + 6 –> 24.

Lausn sem byggir á tengslahugsun

Torfi leysti sömu þraut og Óðinn, Salka, og Iðunn. Lausn hans er gott dæmi um tengslahugsun, sem er 3. stigið í lausnaleiðum barna (sjá töflu 3).

Í þessu myndskeiði má sjá lausnarleið Torfa

Torfi reiknar þrautina í huganum og setur lausnina fram af öryggi. Þegar hann er beðinn um að útskýra lausnarleiðina segir hann „ég gerði, tók tvær sexur, ég margfaldaði fjórum sinnum sex, ég tók tvær sexur, 12 og aðrar tvær sexur, 12 og 12 plús 12 eru 24”. Torfi beitir þekkingu á eiginleikum margföldunnar og reiknireglum. Hann nýtir sér að margföldun er dreifin yfir samlagningu $4 \cdot 6 = (2+2) \cdot 6 = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 12 + 12 = 24$. Hann hugsar lausnina þannig að fjórir hópar af sex eru jafn margir hópar og 2 hópar plús 2 hópar af sex, eða $4 \cdot 6 = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6$. Hann veit að tvær sexur eru tólf og nýtir sér þá margföldunarstaðreynd til að finna fjöldann í tveimur pokum. Til að finna heildarfjöldann leggur hann saman fjöldann í tveimur pokum, og nýtir sér staðreyndina að $12 + 12 = 24$.

Það er áhugavert að sjá að börnin í rannsókninni notuðu sömu lausnaleiðir og komu fram í rannsóknum á *SKSB*. Börnin sýndu að þau skildu að líta má á margföldun sem greiningu á fjölda mengja og fjölda staka í mengi og einnig sem endurtekna samlagningu sem eru grundvallarþættir margföldunar. Í lausnarleið eins barns kom fram skilningur á að margföldun er dreifin. Þó augljóst væri að börnin væru ekki vön að útskýra hugsun sína og lausnaleiðir þá glímdu þau við þrautirnar full sjálfstrausts. Vitað er að börn, sem og aðrir, skerpa skilning sinn með því að segja frá hugsun sinni og fá stuðning við að þróa stærðfræðilega hugsun sína í samræðum (Carpenter o.fl., 2015). Þegar börnin í þessari rannsókn fengu tækifæri til að bregðast við spurningum og hvatningu rannsakanda um að útskýra leið sína að lausn þurftu þau að orða hugsun sína um lausnarferlið. Þau fengu þannig tækifæri til að skerpa skilning sinn á þrautinni og lausnarferli sínu.

Börnin sem við höfum fjallað um í þessari grein eru á aldrinum sex til átta ára. Hæfni sína í stærðfræði hafa þau öðlast bæði í formlegu og óformlegu námi. Sum börnin leystu margföldunarþraut með því að gera sér hlutbundið líkan sem sýnir hvernig þau sjá fyrir sér það sem sagt er frá í þrautinni. Önnur börn sýndu lausnir sem byggðu á flóknari úrvinnslu og sýndu að þau eru að þróa með sér óhlutbundna hugsun og skilning á stærðfræðilegri skráningu. Þessi börn sýndu okkur að þau hafa þegar öðlast grundvallarhæfni í meðferð talna og reikningi sem mun nýtast þeim í námi og daglegu starfi.

Til umhugsunar um stærðfræðinám ungra barna

Rannsóknin stendur enn yfir og hér fylgir umfjöllun um nokkra þætti sem hafa vakið umræður og áhuga í rannsóknarhópnum.

Val á tölum

Þegar lagðar eru þrautir fyrir börn sem eru að byggja upp skilning sinn á margföldun (og reikniaðgerðum almennt) þarf að huga vel að vali á tölum. Taka þarf mið af þekkingu þeirra og reynslu og velja tölur á því talnabili sem börnin ráða við. Einnig þarf að huga að markmiðunum með því að leggja þrautir fyrir. Mismundandi talnastærðir kalla fram mismunandi lausnaleiðir. Til dæmis gat Andrea haldið utan um og leyst þraut þar sem mengin voru þrjú og fjöldi staka í mengi sex með því að gera sér hlutbundið líkan. Andrea sýnir að hún hefur vald á tölum á talnabilinu 0 til 18 og fékk hún tækifæri til að styrkja hugsun sína um margföldun og leikni við talningu. Við lausnina sýnir hún einnig öryggi í vinnuferlinu með þessum tölum. Sama þraut með hærri tölum, til dæmis hefði stæðan $6 \cdot 18$, væntanlega ekki gefið Andreu tækifæri til að kljást við margföldun á sama hátt þar sem talningin hefði sennilega reynst henni erfið. Svipaða sögu má einnig segja um Torfa. Að fá þraut með tölum á talnabilinu 0 til 24 gerði honum kleift að finna lausn í huganum og nýta sér að margföldun er dreifin yfir samlagningu. Torfi þurfti ekki að sjá eða skrá mengin eða fjölda staka í hverju mengi. Í lausn hans kom fram skilningur á þeim eiginleika margföldunar sem lýst er með dreifireglunni (sjá töflu 2). Ef sama þraut hefði verið lögð fyrir með hærri tölum gæti Torfi hafa þurft að gera sér hlutbundið líkan.

Þegar meginmarkmiðið er að börn byggi upp skilning á þeim grundvallarhugmyndum sem margföldun byggir á er mikilvægt að velja tölur sem þau ráða vel við. Það var mikilvægt fyrir Andreu að fjöldi mengja og staka í mengi væri innan þess talnabils sem hún réði við til þess að hún gæti unnið með margföldun. Torfi fékk tækifæri til að vinna með margföldun án þess að búa sér til sér hlutbundið líkan og nýta sér þá þekkingu sem hann hefur um eiginleika margföldunar. Til að kanna nánar hvort Andrea og Torfi geta nýtt þann skilning á margföldun sem þau sýndu í þessum dæmum þarf að leggja fyrir þau flóknari þrautir og/eða þrautir með hærri tölum. Markmiðið er þá að skapa þeim tækifæri til efla hugsun sína og veita þeim hvatningu til að þróa skilning sinn og lausnaleiðir enn frekar. Til þess þurfa börn stuðning með markvissu talnavali í þrautum og leiðandi spurningum.

Skráning á stærðfræðilegri hugsun

Mikilvægt er að hvetja börn til að skrá hugsun sína með myndum, tölum og stærðfræðilegum táknum. Þegar börn lýsa lausn sinni með skráningu byggir hún á innsæi þeirra og endurspeglar hugsun þeirra. Skráning er mikilvæg í stærðfræði og því nauðsynlegt að börn fái hvatningu til að skrá hugsun sína. Í upphafi er skráningin óformleg og fundin upp af barninu. Hlutverk kennarans er að styðja barnið við að nýta reynslu sína af skráningu þegar það lærir um formlega stærðfræðilega skráningu. Til að byggja upp færni í skráningu þurfa börn að finna þörf fyrir hana. Skapa má þörf fyrir skráningu til dæmis, með því að vinna með háar tölur og/eða flókna tegund þrauta.

Það er áhugavert að skoða skráningu Sölku. Í upphafi leysti hún þrautina um gulrótarpokana fjóra með því að gera sér hlutbundið líkan. Eftir að hún komst að niðurstöðu var hún hvött til að skrá lausnarleið sína. Hún teiknar fyrst einn poka með 6 gulrótum. Til að sýna að það væru 4 pokar, skrifar hún tölustafinn 4 við hliðina á pokanum og tengir við pokann með ör. Til að sýna að það séu 4 pokar með 6 gulrótum í hverjum poka þá teiknar hún boga frá 4 yfir í pokann og skrifar tölustafinn 6 undir bogann (sjá mynd 3). Skráning hennar byggir á innsæi og ákveðni í að koma sér upp skipulagi við að leysa viðfangsefni eins og fram kom í lýsingu hennar „Ég leysi stundum vandamálið með svona hringjum …“ Ef við skoðum lausnarleið hennar í upphafi má segja að hún hafi lagt saman 6 + 6 + 6 + 6 til að finna heildarfjöldann. Eftir samræður við rannsakandann og hvatningu til að skrá lausnarleið sína fékk Salka tækifæri að nota skráningu og dýpka um leið hugsun sína um margföldun. Það er ekki langur vegur frá skráningu Sölku í skráningu jöfnunnar $4 \cdot 6 = 24$. Skráningin sýnir að hún færir sig í átt að óhlutbundinni hugsun, sem er forsenda tengslahugsunar.

Söguþráður og viðfangsefni

Börnin sem við höfum rætt um hér að ofan leystu þrautir með einföldum söguþræði og viðfangsefnið er börnunum þekkt. Börn þekkja gulrætur og geta séð fyrir sér að setja 6 gulrætur í poka. Gulrætur eru teljanleg stök og því auðvelt að leysa verkefnið með talningu. Ef verkefnið hefði verið sett fram á formi sem er flóknara að gerð er ekki víst að þessi börn hefðu getað leyst það. Jöfnuna $4 \cdot 6 = 24$ er hægt að setja fram í ólíku samhengi.

1. Iðunn keypti 4 poka af gulrótum. Í hverjum poka eru 6 gulrætur. Hvað keypti Iðunn margar gulrætur samtals?
2. Torfi á 6 gulrætur. Iðunn á 4 sinnum fleiri gulrætur en Torfi. Hvað á Iðunn margar gulrætur?
3. Torfi á 6 kg af gulrótum. Óðinn á 4 sinnum fleiri kg af gulrótum en Torfi. Hvað á Óðinn mörg kg af gulrótum?
4. Andrea hljóp 6 km á hverjum degi í fjóra daga. Hvað hljóp Andrea samtals marga km?
5. Andrea hljóp 6 km. Salka hljóp 4 sinnum þá vegalengd. Hve margar km hljóp Salka?

Þó svo að þrautirnar séu allar um jöfnuna $4 \cdot 6 = 24$ eru þær settar fram í ólíkum búningi og misjafnlega auðvelt að gera sér grein fyrir um hvað er spurt. Hér hefur aðeins verið sagt frá börnum sem glímdu við þraut að gerð eitt. Þrautir þar sem fengist er við samanburð, mælieiningar og samfelldan mælikvarða gera börnum erfitt að sjá fyrir sér mengi og stök. Það er mikilvægt að börn kljáist við ólíkar gerðir þrauta til að fá tækifæri til að dýpka skilning sinn á margföldun.

Orðræða

Skapa þarf börnum aðstæður til að efla vald sitt til að geta tekið þátt í stærðfræðilegri orðræðu. Ef börn fá tækifæri til að útskýra hugsun sína fyrir samnemendum sínum og kennara þjálfast þau í að beita stærðfræðilegum orðaforða. Einnig skerpa þau hugsun sína þegar þau bregðast við hugmyndum og spurningum annarra. Dæmi um það eru samræður Óðins og rannsakanda. Hann hugsar upphátt þegar hann leysir þrautina (telur á sex). Þegar hann er spurður hvernig hann vissi að hann ætti að stoppa á 24 þá er fyrsta svar Óðins að endurtaka lausnarleiðina. Þegar hann er spurður aftur hugsar hann sig um og segir „vissi að ég ætti að gera fjórum sinnum.” Hérna má sjá að hann tekur við ögruninni, skerpir hugsun sína og verður meðvitaður um að hann er að vinna með $4 \cdot 6$. Svipað má sjá hjá Sölku. Í gegnum samræður við rannsakanda sér hún að hún getur leyst þrautina bæði hlutbundið og á huglægan hátt.

Það er mikilvægt að hafa í huga að þegar lausnin er fundin er vinnu við þrautina ekki lokið. Ræða þarf lausnir og lausnaleiðir og gefa börnum tækifæri til að taka þátt í samræðum um lausnir sínar og annarra. Þá skapast aðstæður fyrir börnin til að setja fram hugmyndir sínar og grípa hugmyndir annarra sem er gagnleg reynsla og slík ígrundun er grundvöllur fyrir þróun stærðfræðilegrar hugsunar.

Að lokum

Rannsóknar- og þróunarverkefnið *Stærðfræðikennsla byggð á skilningi barna* á sér um 40 ára langa sögu og hefur verið í stöðugri þróun. Efni sem byggir á þessum rannsóknum hefur verið notað í kennaramenntun hér á landi yfir 20 ár, meðal annars mikið af því efni sem vísað er til í þessari grein. Með rannsókninni sem hér er greint frá er í fyrsta skipti safnað gögnum með markvissum hætti um lausnaleiðir íslenskra barna á reikniþrautum. Niðurstöður greininga á þeim gögnum sem við höfum þegar safnað benda til að hugsun íslenskra barna um tölur og reikning þróist með líkum hætti og barna úr erlendum rannsóknum. Þau dæmi sem við höfum greint frá sýna að þessi börn hafa skilning á þeim grundvallarhugmyndum sem margföldun byggir á. Það verður áhugavert að sjá hvaða niðurstöður við fáum þegar við ræðum við fleiri börn, leggjum fyrir þau fleiri tegundir af þrautum og greinum lausnaleiðir þeirra.

Þróunarvinna með kennurum í þremur grunnskólum hefur veitt okkur innsýn í kennslu kennara. Gaman verður að fylgjast með hvernig greining á lausnaleiðum barna nýtist þessum kennurum við skipulagningu kennslu sinnar. Forsenda þess að kennari geti valið viðfangsefni og nálgun er að hann hafi þekkingu á þróun stærðfræðiskilnings barna. Við teljum að þekking á SKSB styðji kennara í að greina þróun stærðfræðiskilnings nemenda sinna. Þegar kennarinn fylgist með og ræðir við nemendur meðan þeir glíma við stærðfræðiverkefni öðlast hann þekkingu á stærðfræðihugsun nemenda sinna. Þá þekkingu getur hann nýtt sér við skipulagningu á bekkjarumræðum og til að draga athygli að þeirri meginhugmynd stærðfræðinnar sem fengist var við. Mikilvægt er að börn fái verkefni þar sem þau þurfa að rannsaka, greina, túlka og tjá niðurstöður sínar og dýpka þannig skilning sinn og þekkingu á stærðfræðilegu inntaki og vinnubrögðum.

Heimildir

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. og Empson, S. B. (1999). *Children’s mathematics: Cognitively Guided Instruction*. Heinemann.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. og Empson, S. B. (2015). *Children’s mathematics: Cognitively Guided Instruction, 2nd edition*. Heinemann.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Johnson, N. C., Turrou, A. C. og Wager, A. A. (2017). *Young children’s mathematics: Cognitively Guided Instruction in early childhood education*. Heinemann.

Carpenter, T. P. og Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education 15*(3),179–202.

Empson, S. og Jacobs, V. R. (2008). Learnign to listen to children´s mathematics. In D. Tirosh and T. Woods (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Education*, pp. 257–281. Rotterdam: Sense Publisher.

Empson, S. B. og Levi, L. (2011). *Extending children´s mathematics: Innovations in Cognitively Guided Instruction*. Heinemann.

Hill, H., Ball, D. H. og Schilling, S., (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372–400.

Jónína Vala Kristinsdóttir. (2004). Öll börn geta lært að reikna. *Glæður 4*(1), 4–10).

Niss, M. A. (2011) The Danish KOM project and possible consequences for teacher education.
https://www.semanticscholar.org/paper/The-Danish-KOM-project-and-possibleconsequences-Niss/eb176b269b803fbff39c01781f8809af8e3d741f

Thames, M. H. og Ball, D. L. (2010). What math knowledge does teaching require? *Teaching Children Mathematics, 17*(4), 220–229.

Ólöf Björg Steinþórsdóttir (olly.steintho(hja)uni.edu) er dósent í stærðfræðimenntun við stærðfræðideild Háskóla Norður-Iowa í Bandaríkjunum. Hún lauk bakkalárprófi frá Kennaraháskóla Íslands árið 1986, og kenndi við grunnskóla til ársins 1995. Ólöf lauk meistaraprófi frá Háskóla Wisconsin í Madison árið 1997 og doktorsprófi frá sömu stofnun árið 2003. Rannsóknarsvið hennar tengist stærðfræðinámi og -kennslu og er sérsvið hennar aðgerðaskilningur barna, og skilningur barna á almennum brotum og hlutföllum. Ólöf hefur kennt á fjölmörgum námskeiðum fyrir kennara þar sem stærðfræðiskilningur barna er hafður að leiðarljósi í kennslu.

Guðbjörg Pálsdóttir (gudbj(hjá)hi.is) er dósent við Deild faggreinakennslu Menntavísindasviðs Háskóla Íslands. Hún lauk kennaraprófi frá Kennaraháskóla Íslands 1978 og kenndi í grunnskóla til ársins 2001. Hún var á því tímabili grunnskólakennari og æfingakennari, síðast í 13 ár við Æfingaskóla Kennaraháskóla Íslands (síðar Háteigsskóla). Guðbjörg lauk námi í Danmörku í almennri kennslufræði og stærðfræðimenntun auk þess sem hún lauk meistaraprófi frá HÍ, 2004. Hún hefur unnið að námsefnisgerð og gerð kennsluleiðbeininga og haldið fjölda námskeiða fyrir stærðfræðikennara. Rannsóknasvið hennar snúast um kennaramenntun, starfsþróun og stærðfræðinám og -kennslu.

Jónína Vala Kristinsdóttir (joninav(hja)hi.is) er dósent í stærðfræðimenntun við Deild-

kennslu- og menntunarfræði við Menntavísindasvið Háskóla Íslands. Hún lauk bakkalárprófi frá Kennaraháskóla Íslands 1975, meistaraprófi frá sömu stofnun árið 2003, doktorsprófi frá Háskóla Íslands árið 2016 og prófi í uppeldisfræði frá Uppsala háskóla 1983. Hún var bekkjarkennari og æfingakennari við Æfingaskóla Kennaraháskóla Íslands í 20 ár. Jónína hefur skrifað námsefni í stærðfræði fyrir miðstig grunnskóla, unnið að námskrárgerð í stærðfræði og kennt á fjölmörgum námskeiðum fyrir kennara. Rannsóknarsvið hennar tengist stærðfræðinámi og -kennslu í skóla fyrir alla, starfstengdri sjálfsrýni og samvinnurannsóknum með kennurum.

Höfundar þakka Tryggva Thayer fyrir aðstoð hans við að setja inn myndskeiðin.

Gestaritstjórn afmælisgreina Ingvars Sigurgeirssonar: Anna Kristín Sigurðardóttir prófessor, Baldur Sigurðsson dósent og Gerður G. Óskarsdóttir fyrrverandi fræðslustjóri Reykjavíkur.

SKÓLAÞRÆÐIR
TÍMARIT SAMTAKA ÁHUGAFÓLKS UM SKÓLAÞRÓUN

Grein birt 21.4. 2021