Reynsla kennara að byggja upp hugsandi skólastofu í framhaldsskóla



Eyþór Eiríksson

Þessi grein fjallar um reynslu stærðfræðikennara í framhaldsskóla af kennslunálgun sem ber heitið hugsandi skólastofa (e. thinking classroom). Í greininni er gert ráð fyrir að lesandi þekki til grunnatriða hugsandi skólastofu. Bent er á bókina *Building Thinking Classrooms in Mathematics: Grades K-12* eftir Peter Liljedahl. Von er á íslenskri útgáfu bókarinnar í þýðingu Bjarnheiðar Kristinsdóttur. Aftan við greinina er birtur listi yfir greinar og ritgerðir á íslensku um hugsandi skólastofu.

Ég heiti Eyþór og ég vinn við að byggja. Ég vinn hvorki við að byggja hús né húsgögn. Ég vinn við að byggja upp hugsandi skólastofu í framhaldsskóla. Ég vinn verkið með mínum nemendum og verkinu er aldrei lokið. Þó að verkinu muni aldrei ljúka sé ég miklar breytingar frá því ég byrjaði að byggja á vorönn árið 2022. Í dag sé ég nemendur blómstra inni í okkar hugsandi skólastofu. Ég sé nemendur rökræða um stærðfræði, útskýra og biðja um útskýringar sín á milli. Ég sé nemendur sýna þrautseigju þar sem þau glíma við verkefni sem þau fá ekki fyrir fram gefna lausnarleið til að nota. Ég sé nemendur kynnast, hlæja saman, sýna virðingu og samkennd. Að sjálfsögðu sé ég líka nemendur sem finna sig ekki í þessu umhverfi. Og því held ég áfram að byggja.

Þegar ég kláraði stúdentspróf tók ég þá stefnu að læra að verða framhaldsskólakennari í

stærðfræði. Ég var ánægður með þá stærðfræðikennslu sem ég hafði fengið og ætlaði því að kenna stærðfræði á sama máta og mér var kennd stærðfræði. Það sem mér fannst einkenna góðan kennara var einfaldlega það að kennarinn gæti útskýrt hlutina vel fyrir nemendum. Þetta segir sig hálfpartinn sjálft. Nemandinn þarf að vinna ákveðin verkefni og það er hlutverk kennarans að segja honum hvernig hann getur gert þau. Því jú, hvernig ætti nemandinn annars að geta gert þau? En í fyrstu stærðfræðimenntunaráföngunum sem ég tók uppi í háskóla snerust hugmyndir mínar um hlutverk stærðfræðikennarans á hvolf. Á stærðfræðikennari kannski ekki að mata upplýsingar ofan í nemendur? Á hann kannski að fá nemendur til að *hugsa* og ef til vill *uppgötva sjálf*? Á kennarinn að hlusta á hugmyndir nemenda og koma af stað umræðum um hvernig nemendur skilja hlutina á mismunandi vegu? Á hann að hvetja nemendur til að vera óhrædd við að setja fram tilgátur og færa rök fyrir máli sínu? Á sama tíma fann ég einnig í þeim stærðfræðiáföngunum sem ég tók uppi í háskóla að ég hafði vanist því í mínum framhaldsskóla að vinna verkefni sem voru svipuð því sem kennarinn fór yfir í sinni innlögn eða sýnidæmum í námsbókinni. En núna var veruleikinn annar. Nú fyrst þurfti ég að glíma við verkefni þar sem engin augljós lausnarleið var gefin. Nú þurfti ég að hugsa, velta hlutunum fyrir mér, afla mér upplýsinga og rökræða hlutina við samnemendur. Ólíkt því sem ég gerði þegar ég var nemandi í framhaldsskóla.

Ég er ekki að segja ykkur neinar nýjar fréttir. Sérfræðingar um stærðfræðimenntun hafa gagnrýnt hefðbundna kennsluhætti í stærðfræðikennslu í marga áratugi. Kennsluhætti þar sem kennarinn talar meira en nemendur og er eina uppspretta þekkingar í skólastofunni. En samt sem áður gengur okkur hægt að snúa við blaðinu. Enda er kerfið íhaldssamt. Ég upplifi að stærðfræðikennarar tali um að hröð yfirferð á efni komi í veg fyrir að hægt sé að staldra við og leyfa nemendum að velta hlutum fyrir sér. Til að ná að komast yfir efni áfangans sé nauðsynlegt að sýna þeim einfaldlega hvað þau eiga að gera og nemendur geti hermt eftir og æft sig á dæmum í námsbókinni.

Í þeim stærðfræðimenntunarfræðiáföngum sem ég tók í háskólanum heyrði ég endalaust af rökum fyrir því af hverju við ættum ekki að kenna stærðfræði með hefðbundnum kennsluháttum. Stærðfræðikennarar ættu að fá nemendur til að hugsa, rökræða, gera mistök og læra af þeim. En mér fannst lítið um praktískar leiðir til að ná því fram. Ég vissi ekki hvað ég ætti að gera í staðinn. Þar til allt í einu að ég fékk líflínu. Þarna var eitthvað sem ég gat tekið og notað í kennslu. Leið til að gera hlutina á allt annan hátt en þann sem við höfum áður vanist. Byggt upp hugsandi skólastofu.

Hugsandi skólastofa

Hugsandi skólastofa er nýstárleg kennslunálgun í stærðfræði sem hefur verið rannsökuð og þróuð frá upphafi 21. aldar. Hugsandi skólastofa snýst um að skapa rými þar sem hugsun er

í fyrirrúmi. Rými þar sem nemendur vinna saman að verkefnum sem eru hönnuð til að byggja upp skilning á nýjum hugtökum og hugmyndum. Rými þar sem nemendur leita skilnings í gegnum samræður við samnemendur og kennara. Þetta hljómar allt ofboðslega vel en hvernig er hægt skapa slíkt rými? Í sinni einföldustu mynd þá sköpum við slíkt rými með því að gera andstæðuna við það sem við gerum í dag. Í stað þess að sýna nemendum ákveðna lausnaraðferð og láta þau síðan glíma við svipuð verkefni þá látum við þau glíma við verkefnin án þess að sýna þeim lausnarleiðina fyrir fram. Í stað þess að láta nemendur vinna sitjandi í sínar bækur þá látum við nemendur vinna standandi við tússtöflur á veggjunum. Í stað þess að nemendur vinni ein eða með sessunaut þá látum við nemendur vinna í þriggja manna handahófskenndum hópum (Liljedahl, 2020).

Við getum hins vegar ekki allt í einu hætt að láta nemendur fá lausnarleiðina fyrir fram. Í gegnum þeirra stærðfræðinám hafa þau byggt upp ákveðin viðmið hvernig stærðfræðikennsla fer fram. Og þau halda fast í sín viðmið. Þau munu ekki taka vel í að stærðfræðikennarinn hætti allt í einu að gefa þeim lausnarleiðina fyrir fram. Það fer gegn þeirra viðmiðum um hvernig stærðfræðikennslu eigi að vera háttað. Við þurfum að sannfæra nemendur um að nú verði stærðfræðitímar öðruvísi en þau hafa vanist. Í þessum nýju stærðfræðitímum er gert ráð fyrir að þau hugsi, rökræði, prófi sig áfram, geri mistök, læri af þeim og vinni saman. Við sannfærum nemendur með því að leggja fyrir þau þrautalausnir. Þrautalausnir sem hannaðar eru til að hvetja nemendur til hugsunar, rökræðna og vekja upp forvitni nemenda. Slíkar þrautalausnir er meðal annars hægt að finna í eftirfarandi safni sem er á ensku og hefur verið tekið saman af sem nýta sér aðferðir hugsandi skólastofu: https://tinyurl.com/thrautir

Eftir þrjár til fimm kennslustundir af þrautalausnum er hægt að leggja fyrir nemendur verkefni úr námskránni án þess að gefa þeim lausnarleið fyrir fram. Það þýðir að við hættum með innlögn í upphafi kennslunnar. Samkvæmt Peter Liljedahl (2020) hefur kennarinn þrjár til fimm mínútur í upphafi kennslustundar til að rifja upp fyrri þekkingu með nemendum og rætt þau atriði sem nauðsynlegt er að nemendur viti til að geta byrjað á fyrsta verkefni tímans. Þegar nemendur glíma við verkefnin eykst færni þeirra sem gefur kennaranum tækifæri að leggja fyrir þau smám saman þyngri verkefni. Og nú erum við byrjuð að byggja upp hugsandi skólastofu, þar sem hugsun er í fyrirrúmi.

Að byggja upp hugsandi skólastofu er kennslunálgun sem inniheldur 14 atriði sem kennari innleiðir í fjórum skrefum. Í þessari grein mun ég ekki fara nánar í þau atriði en bendi á bókina *Building Thinking Classrooms in Mathematics: Grades K-12*, eftir Peter Liljedahl. Í þessari grein ætla ég að kafa betur í það hvernig mér hefur gengið að byggja upp hugsandi skólastofu og hvernig ég upplifi það sem gerist í mínum stærðfræðitímum.

Það er gaman að spyrja krefjandi spurninga á borð við þessa: Af hverju kennum við stærðfræði? Er virkilega mikilvægt að nemendur kunni að margfalda saman 34 og 78 án reiknivélar? Af hverju að láta nemendur leggja á sig vinnu sem reiknivélar og símar geta svarað á methraða? Jú, því við erum að þjálfa nemendur að hugsa, hugsa um tölur, skilja tenginguna á milli margföldunar og samlagningar, skilja einingar og tugi. Það er nákvæmlega ekkert merkilegt við svarið þegar við margföldum saman 34 og 78, en leiðin að svarinu getur verið stórmerkileg ef við leyfum nemendum að hugsa og fara sínar eigin leiðir. Þegar nemendur verða eldri munu þau ekki þurfa að margfalda stórar tölur saman án reiknivélar. En þau munu þurfa að hugsa, leysa flókin verkefni þar sem þau þurfa að prófa sig áfram, vinna verkefni með öðrum, rökstyðja og hlusta á rök annarra. Þess vegna verðum við að búa til rými þar sem nemendur fá tækifæri og frelsi til að hugsa um og leika sér með stærðfræðina. Ein leið til þess er að byggja upp hugsandi skólastofu.

Mér finnst ég krefjast mikils af nemendum mínum. Ekki bara vitsmunalega heldur líka félagslega. Þau þurfa að standa (já þeim finnst það mjög erfitt!), þau þurfa að vinna og eiga samskipti við nemendur sem þau þekkja ekki og viðurkenna fyrir þeim þegar þau skilja ekki hvað þeirra hópur er að gera. Þau þurfa að útskýra fyrir öðrum nemendum, þó að þau sjálf séu búin að átta sig á verkefninu. Þau þurfa að prófa sig áfram, velja ákveðna leið, þó þau viti að þessi leið muni kannski ekki skila neinum árangri við að leysa verkefnið. Og þau vita að ég mun ekki stoppa þau þó þau séu á villigötum, allavega ekki strax. Að mínu mati er þessi aukna krafa mín til nemenda að skila árangri. Að minnsta kosti finnst mér ofboðslega gaman í tímum og ég upplifi góða stemningu í stofunni og gæti það talist ágætis mælikvarði á gæði kennslu.

Ég reyni að tala eins lítið og ég get í upphafi tímans. Ég kynni fyrsta verkefnið munnlega og skipti nemendum handahófskennt í hópa sem fara síðan að tússtöflunum. Hver hópur fær einn tússpenna. Nemendur eru fljót að fara í hópana og byrja strax á verkefninu. Ég stend í miðri stofunni og hef yfirsýn yfir hvað öll í nemendahópnum eru að gera. Ég sé þau byrja að ræða saman um verkefnið innan hópsins. Þau líta á aðrar töflur, benda og jafnvel spyrja vin í öðrum hópi spurninga. Stundum sé ég einn einstakling í hópnum æða áfram í verkefninu meðan hópfélagar hans standa hjá. Ég labba að hópnum, læt hópinn skipta um ritara og minni þau á að öll í hópnum þurfa að skilja hvað þau séu að gera. Ég labba í burtu og sé þann sem æddi áfram með pennann áðan útskýra fyrir sínum hópfélögum. Ég sé annan hóp sem virðist vera strand. Ég labba að þeim og bendi þeim á að tala við hóp fimm, fá vísbendingu frá þeim. Ég fer aftur í miðja stofuna. Fæ yfirsýn. Einn hópur er að klára fyrsta verkefnið svo ég labba að þeim og gef þeim næsta verkefni. Næsta verkefni er aðeins flóknara en byggir á sömu atriðum og það fyrsta. Ég sé hóp sem er að detta full langt aftur úr. Ég tek umræðu með þeim til að koma þeim á rétta braut. Svona heldur þetta áfram þar til allir hópar hafa komist yfir ákveðinn þröskuld í verkefnum dagsins. Þá bið ég hópana að

stoppa og við tökum hópumræðu saman. Ég stjórna umræðunni og fæ nemendur til að aðstoða mig að draga saman þann lærdóm sem við tökum með okkur úr verkefna vinnunni. Ég reyni að nýta vinnu nemenda til útskýringar. Hér fæ ég einnig tækifæri til að tengja hugtök og stærðfræðitákn við verkefni dagsins. Eftir umræðuna setjast nemendur niður, glósa það sem þeim fannst mikilvægt og fá tækifæri til að leysa verkefni til að kanna eigin skilning á verkefnum dagsins.

Í umhverfi eins og ég lýsi hér að ofan gef ég nemendum tækifæri til að hugsa, sýna þrautseigju, vinna saman, eiga í rökræðum við samnemendur. Ég fæ tækifæri til að:

- hafa yfirsýn yfir hvað öll eru að gera.
- skipuleggja nám nemenda út frá skilningi fremur en aðgerðum og formúlum.
- halda nemendum í flæði. Ég næ að hjálpa þeim sem ekki skilja og get leyft öðrum að kafa dýpra, en um sama efni svo við getum öll talað saman.
- fylgjast með nemendum tala um og skrifa stærðfræði og aðstoða þau við að bæta sig í tungumáli og ritháttum stærðfræðinnar.
- nýta eigin persónuleika til að skapa gott andrúmsloft með húmor og gleði. Í hefðbundinni stærðfræðikennslu finnst mér öll mín orka fara í að virkja nemendur sem veldur því að ekki næst að skapa eins ánægjulegt andrúmsloft í stofunni.

En hvernig er hægt að láta nemendur vinna stærðfræðiverkefnin án þess að sýna þeim lausnarleið fyrir fram? Þetta er til dæmis gert með því sem Peter Liljedahl kallar að skera námsefnið í þunnar sneiðar (Liljedahl, 2020) en Watson og Mason kalla að nýta breytileika og óbreytileika (Watson og Mason, 2007) í röð verkefna. Þetta þýðir að nemendur fá einföld verkefni sem þau ráða við í byrjun, síðan er annaðhvort gefið verkefni sem er að mestu óbreytt eða verkefni sem breytir einhverjum eiginleika. Smátt og smátt geta nemendur fengið tilfinningu fyrir mynstri í verkefnaröðinni og áttað sig á eiginleikum sem eru markmið kennslunnar. Hér er dæmi um hvernig ég hef gert það.

Andhverfa fylkis:

Markmið kennslunnar er að nemendur átti sig á því að andhverfa fylkis á forminu

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

og að andhverfan hefur þann eiginleika að:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Auðvelt væri að kynna nemendum þessa formúlu og leyfa þeim síðan að spreyta sig á að finna andhverfu á nokkrum fylkjum. En ég fór þá leið að vinna eftir aðferðum sem lýst var hér ofar og kallast að þunnskera efnið eða nýta sér breytileika og óbreytileika. Ég byrjaði á eftirfarandi verkefni:

Verkefni af gerð A. Finnið fylkið þannig að

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \text{ þar sem } k \in \mathbb{R}$$

Ástæðan fyrir að ég byrjaði með þetta verkefni var að öll sem kunna að margfalda saman fylki geta byrjað strax á verkefninu t.d. með því að velja fylki af handahófi og sjá hvort margfeldið sé á réttu formi. Þegar hópur kláraði dæmi gaf ég þeim eins verkefni nema breytti tölunum í fyrsta fylkinu. Þannig unnu þau með sama mynstrið áður en næsta sneið var tekin fyrir. Þegar allir hópar höfðu gert nokkur svona dæmi lét ég hópana glíma við almennu útgáfuna, það er ég gaf þeim eftirfarandi verkefni.

Verkefni af gerð B. Finnið fylkið þannig að

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \text{ þar sem } k \in \mathbb{R}$$

Ef þeim gekk illa að leysa þetta þá þurftu þau fleiri æfingarverkefni af gerð A eða þurftu á umræðu með kennara að halda til að skilja verkefnið betur. En ef þetta gekk vel þá kynnti ég sértilvikið þegar en þá með tölum í stað og :

Verkefni af gerð C. Finnið fylkið þannig að

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Takið eftir að hér notaði ég sama upphafsfylki og í verkefnum af gerð A sem nemendur fengu í upphafi tímans. Það er með ráðum gert til að halda óbreytileika milli þeirra tveggja verkefna. Líkt og þá gaf ég nemendum nokkur svipuð dæmi og endaði á almennu útgáfunni.

Verkefni af gerð D. Finnið fylkið þannig að

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Með því að skoða mynstrin sem myndast enda nemendur á að vera fær um að finna formúluna fyrir andhverfu fylkis. Í kjölfarið er mikilvægt að stýra hópumræðu þar sem unnið er með orðaforða, rithátt og eiginleikar andhverfu fylkja festir í sessi.

Hvað segja nemendur?

Í mínum skóla fylla nemendur út áfangamat eftir hverja önn. Þar svara þau meðal annars skriflega hvað þeim finnst kennarinn gera vel og hvað þeim finnst gott í áfanganum. Einnig svara þau hvað kennarinn gæti gert betur og hverju mætti breyta í áfanganum. Hér fyrir neðan eru fimm jákvæð og fimm neikvæð svör frá nemendum um fyrirkomulag mitt í hugsandi skólastofu.

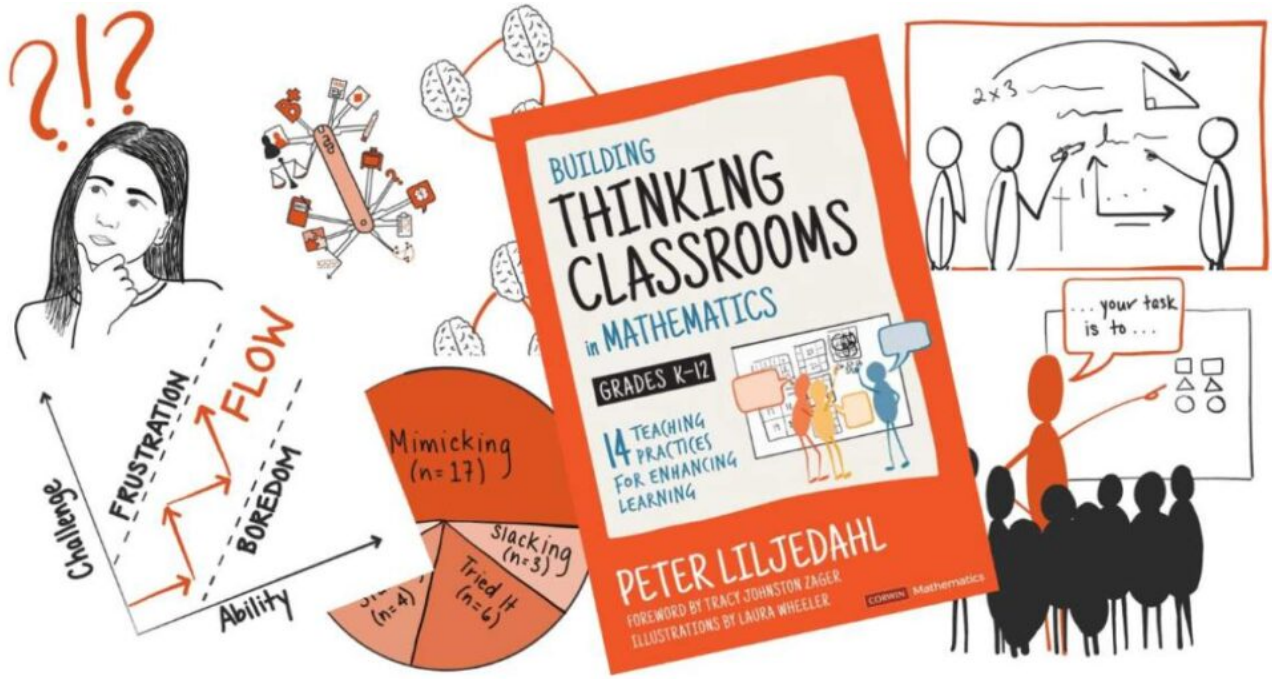
Jákvætt:

- Kennarinn leyfir okkur að annast eigin skilning á efninu með því að prófa okkur áfram í dæmum.
- Mér finnst það virka mjög vel fyrir mig að reikna dæmin uppi á töflu og í hópum af því að það hjálpar mér að ná efninu betur.
- Hann dregur okkur inn í námið og lætur okkur hugsa sjálfstætt og spjalla saman til að ná lausninni.
- Skemmtilegt að læra upp á töflu, skemmtilegt nám.
- Kennsluaðferðin hans virkar fullkomlega fyrir mig. Mér finnst ég skilja efnið mikið betur við það að reikna það í hópum uppi á töflu.

Neikvætt:

- Ég vinn ekki vel þegar unnið er í hópum uppi á töflu sem við gerum eiginlega alltaf og læri betur ef ég geri dæmi úr bókinni. Við höfum ekki mikinn tíma í bókinni. Þetta er fyrsti og eini áfanginn sem mér finnst ég ekki skilja því ég læri ekki efnið þegar við skrifum í hópum uppi á töflu og mér finnst ég ekki fá nógu góðar útskýringar.
- Mætti vera aðeins minni hópavinna, alveg fínt að vinna í hópum stundum, bara þetta er kannski aðeins of mikið fyrir suma.
- Hann má glósa meira uppi á töflu í stað þess að láta okkur gera allt sjálf.
- Mér finnst aðferðin sem hann notar ekki góð, að mínu mati hentar þessi aðferð mjög vel þeim sem kunna stærðfræði en ekki þeim sem þurfa meiri hjálp.
- Maður þarf stundum að standa of lengi uppi á töflum og verður þreyttur í líkamanum.

Ég upplifi að flest nemenda skilji að í hugsandi skólastofu snúast stærðfræðitímar um að hugsa og velta hlutunum fyrir sér með samnemendum. Þeim finnst það ekki alltaf gaman. Þeim finnst það krefjandi. Oftast þegar liðið er á önnina er andinn í hópnum orðinn mjög góður. Tímarnir einkennast af mikilli orku sem brýst út í hinu stærðfræðilega sem og hinu félagslega. Mitt stærsta hlutverk sem kennari er að búa til umhverfi þar sem nemendur geta sett fram tilgátur og leikið sér með stærðfræðina í stað þess að segja nemendum hvernig stærðfræðin „eigi“ að vera. Ég er sífellt að reyna að bæta leikvöllinn til að hann henti sem flestum. Og ég er alltaf spenntur að mæta á leikvöllinn.



Myndin er fengin af https://blog.innovamat.com/en/building-thinking-classrooms/

Heimildir

Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning.* Corwin.

Watson, A. og Mason, J. (2007). *Variation and mathematical structure.* Association of teachers of mathematics.

Bækur og greinar um hugsandi skólastofu

Áslaug Dóra Einarsdóttir. (2021). Hugsandi skólastofa. *Flatarmál 28*(1), 13-16. https://www.ki.is/media/ajalm0oy/flatarmal2021-v9.pdf

Áslaug Dóra Einarsdóttir. (2020). *Kennslunálgunin hugsandi skólastofa – Starfendarannsókn á þrautalausnum í stærðfræðikennslu* (óbirt meistaraprófsritgerð). https://hdl.handle.net/1946/37192

Dóróthea Margrét Einarsdóttir. (2023, 7. október). Reynsla af hugsandi skólastofu í stærðfræði. *Flatarmál.* https://flatarmal.is/reynsla-af-hugsandi-skolastofu-i-staerdfraedi/

Eyþór Eiríksson. (2023, 4. september). Að byggja upp hugsandi skólastofu. *Flatarmál.* https://flatarmal.is/ad-byggja-upp-hugsandi-skolastofu/

Eyþór Eiríksson. (2022). Að brjóta niður veggi viðmiða í stærðfræðistofunni - Starfendarannsókn á breytingum á viðmiðum innan stærðfræðistofunnar þegar kennt er eftir hugmyndum um hugsandi kennslurými (óbirt meistaraprófsritgerð). https://hdl.handle.net/1946/41403

Guðbjörg Pálsdóttir. (2019). Vinnustofa Peter Liljedahl. *Flatarmál 26*(1), 22-24. https://www.ki.is/media/t2pp11hj/flatarmal_2019_1tbl.pdf

Ingólfur Gíslason og Bjarnheiður Kristinsdóttir. (2019). Hvatt til hugsunar í stærðfræði. *Skólaþræðir. Tímarit Samtaka áhugafólks um skólaþróun*. https://skolathraedir.is/2019/11/15/hvatt-til-hugsunar-i-staerdfraedi

Um höfund

Eyþór Eiríksson er stærðfræðikennari og hefur unnið við framhaldsskóla frá árinu 2020. Hann lauk M.Sc. í *menntun framhaldsskólakennara* árið 2022 frá Háskóla Íslands. Meistararitgerð hans var starfendarannsókn um hugsandi skólastofu. Áður kláraði hann B.Sc. í *stærðfræði og stærðfræðimenntun* frá Háskóla Íslands. Hann hefur frá árinu 2022 kennt samkvæmt hugmyndafræði hugsandi skólastofu.

SKÓLAÞRÆÐIR
TÍMARIT SAMTAKA ÁHUGAFÓLKS UM SKÓLAÞRÓUN

Grein birt 9. október 2024